# ANÁLISIS MATEMÁTICO II

## Examen Final 27/02/2024

**APELLIDO DEL ALUMNO: ............................................... NOMBRE: ....................................**

**CORRIGIÓ: ......................................................... REVISÓ: .......................................................**

| T1 | | T2 | | P1 | P2 | P3 | P4 | CALIFICACIÓN |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.***
***No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas***
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

---

**T1)** Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es verdadera proporcione una demostración, caso contrario exhiba un contraejemplo.

**a.** La función definida por $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es discontinua en (0,0)y admite derivada en toda dirección en dicho punto.

**b.** $\int_C \vec{f}.d\vec{s} = e^2 - 1$ siendo $\vec{f}(x,y) = (2xcosy\,, -x^2seny)$ y $C$ es la curva parametrizada por $\vec{r}$: $[1,2] \to R^2$ tal que $\vec{r}(t) = \left(e^{t-1}, sen\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)$.

**T2)** **a**. Defina punto regular de una superficie parametrizada $\vec{X}: D \subseteq R^2 \to R^3\ /\vec{X} = \vec{F}(u,v)$ y proporcione las ecuaciones vectoriales del plano tangente y recta normal a la superficie en dicho punto.

**b.** ¿Es verdad que las líneas de campo de $\vec{G}(x,y) = (x^2y\,, -2xy^2)$ son curvas cerradas? Justifique la respuesta.

**P1)** Calcule el flujo del campo $\vec{G}: R^3 \to R^3\ /\vec{G}(x,y,z) = (xy, x, xz)$ a través de la superficie abierta $x^2 + y^2 = 2x$ con $z \leq 4 - x^2 - y^2$ en el primer octante. Indique gráficamente la orientación escogida de la superficie.

**P2)** Sea el campo escalar $h: D \subset R^2 \to R$ tal que $h(x,y) = (x^4 + y^2)\sqrt{xy}$ . Analice si la función $h$ alcanza en el punto (0,0) un extremo global en $D$.¿Es también extremo local? Fundamente claramente las respuestas.

**P3)** Calcule la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (g(x) + 2y\,, 3x - 2y^2 + 5y)$ a lo largo de la curva frontera de la región plana $D$: $\begin{cases} y \geq |x| \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ orientada en sentido horario, siendo $g(x)$ la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

**P4)** Calcule el volumen de sólido definido por $z \geq x^2 + y^2$ , $z \leq 2y + 3$ .

AM 2 UTN BA | Final | HOJA N° 1/3 FECHA 27-2-24

T1 Indique si cada una de las sig. proposiciones es V o F. Justificar

a) La función definida por $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

es discontinua en (0,0) y admite derivada en toda dirección en dicho punto

Para que f sea continua en (0,0) → Debe estar definida f en (0,0)
→ " existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
→ lim = f

- $f(0,0) = 0$ ✓
- ¿$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \xrightarrow{\text{si } (x,y)=(0,0)} = 0$ ✓

$$\xrightarrow{\text{si } (x,y)\neq(0,0)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} =$$

$$\text{por } y=x \Rightarrow = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2x^2}{x^2x^2+\underbrace{(x-x)^2}_{0}} = 1$$

$\nexists \lim_{xy\to 00} f(x,y)$

f No es continua en (0,0)

$\vec{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+h\vec{v}] - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(ha)^2(hb)^2}{(ha)^2(hb)^2+(ha-hb)^2} \circledast$$

$\circledast$ Si $a=b$ → $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2a^2h^2b^2}{h^2a^2h^2b^2} = \infty$
⇔ $ha-hb=0$
→ ∄ límite

(F) f NO admite derivadas direccionales en toda dirección

b) $\int_C \bar{F} d\bar{s} = e^2 - 1$ siendo $\bar{F}_{(x,y)} = (2x\cos(y), -x^2 \operatorname{sen}(y))$ y C es la curva parametrizada por $\bar{r}: [1,2] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{r}_{(t)} = (e^{t-1}, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}))$

Curva: $A: \bar{r}_{(1)} = (1, 0) \longrightarrow B = \bar{r}_{(2)} = (e, 1)$

- $\bar{F} \in C^{\infty}$ (componentes func. elementales)
- $\operatorname{dom}(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$ (conj. abierto simplemente conexo)
- $\bar{F} = (P, Q) \to \left.\begin{matrix} Q'_x = -2x \operatorname{sen}(y) \\ P'_y = -2x \operatorname{sen}(y) \end{matrix}\right\rangle = \checkmark$

Se cumplen las 3 condiciones para que $\bar{F}$ sea campo conservativo ✓

$\bar{F}$ campo conservativo $\Rightarrow \exists\, \varphi \,/\, \bar{F}_{(x,y)} = \underbrace{\nabla\varphi_{(x,y)}}_{(\varphi'_x, \varphi'_y)}$

Hallo función potencial $\varphi$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2x\cos(y) \xrightarrow[\text{en } x]{\text{integro}} \varphi_{(x,y)} = x^2\cos(y) + \beta(y) \\ \varphi'_y = -x^2 \operatorname{sen}(y) \; (I) \end{cases}$$

$\hookrightarrow \varphi'_y = -x^2 \operatorname{sen}(y) + \beta'(y) = (I)$

$= -x^2 \operatorname{sen}(y) \Rightarrow \beta'(y) = 0$

$\beta_{(y)} = C \quad C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\varphi_{(x,y)} = x^2 \cos(y) + C}$$

$B \begin{cases} x = e \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad A \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\int_C \bar{F} d\bar{e} = \int_A^B \nabla\varphi_{(x,y)} d\bar{e} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)} = (e^2 \cos(1) + C) - (1^2 \cos(0) + C) =$$

$$= e^2 \cos(1) - 1 \neq e^2 - 1$$

F

T2 a) Defina punto regular de una sup. parametrizada por $\bar{X}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \bar{X} = F(u,v)$ y proporcione las ecuaciones vectoriales del plano tangente y recta normal a la superficie en dicho punto.

$\bar{X} = F(u,v)$ es regular si para todo punto de la sup. se cumple que $F'_u \times F'_v \neq \bar{0}$

b) ¿es Verdad que las líneas de campo de $\bar{G}(x,y) = (x^2 y, -2xy^2)$ son curvas cerradas?

$C: \bar{\gamma}(t)$ línea de campo $\rightarrow \bar{G}(\gamma(t)) = \bar{\gamma}'(t)$

$$\bar{G}(x,y) = \underbrace{(x^2 y, -2xy^2) = (x'(t), y'(t))}$$

$$x^2 y = x'(t) = \frac{dx}{dt} \qquad -2xy^2 = y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{x^2 y} = \frac{dy}{-2xy^2}$$

$$\frac{-2\cancel{x}\,dx}{x^{\cancel{2}}} = \cancel{y}\frac{dy}{y^{\cancel{2}}} \Rightarrow -\frac{2}{x}\,dx = \frac{dy}{y}$$

integro m.a.m

$$-2\ln(x) + c = \ln(y)$$

$$e^{-2\ln(x)+c} = e^{\ln(y)}$$

$$e^{\ln(x^{-2})}\underbrace{e^{c}}_{k} = y$$

F

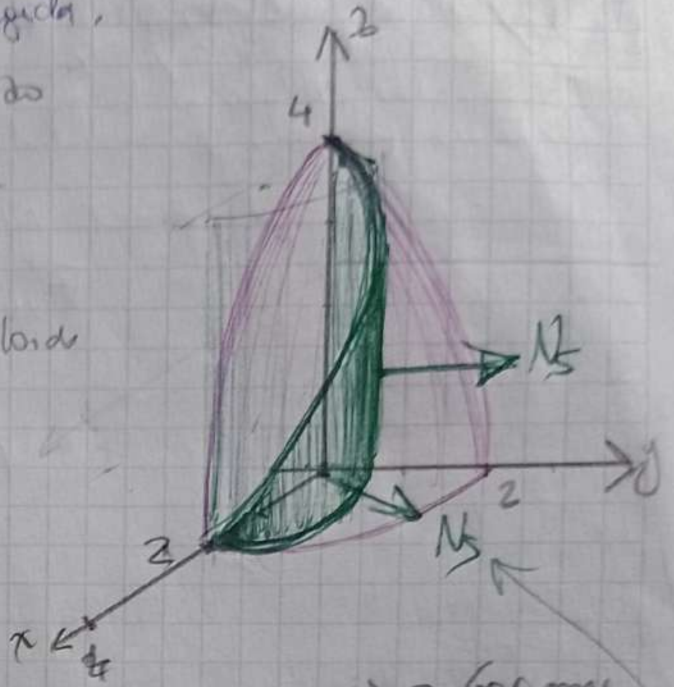
No es curva cerrada

$$\boxed{y = \frac{k}{x^2}}$$

NOTA

$\boxed{P1}$ Calcule el flujo del campo $\vec{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \vec{G}_{(x,y,z)} = (xy, x, xz)$ a través de la sup. abierta $x^2+y^2=2x$ con $z \leq 4-x^2-y^2$ en el 1er octante.
Indicar, gráficamente, la orientación elegida.

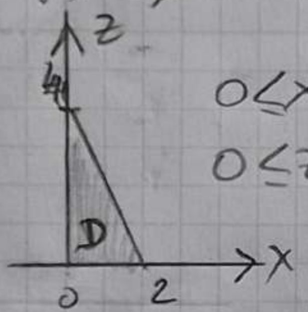
$$S: \begin{cases} x^2+y^2=2x \to \text{cilindro corrido en } x \\ z \leq 4-x^2-y^2 \to \text{paraboloide invertido} \\ 1^\circ \text{ octante} \end{cases}$$




Hallo intersección cilindro y paraboloide

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=4-(x^2+y^2) \end{cases} \to z = 4-2x$$

Proy de S en XZ




$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq z \leq 4-2x$

$y \geq 0$ (primer octante)

$y$: $x^2+y^2=2x \to y=\sqrt{2x-x^2}$

$$S: \bar{\sigma}_{(x,z)} = (x, \sqrt{2x-x^2}, z)$$

$$\bar{\sigma}'_x = \left(1, \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}, 0\right) \to \left(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, 0\right)$$

$$\bar{\sigma}'_z = (0,0,1)$$

$$\bar{\sigma}'_z \times \bar{\sigma}'_x = \left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, \overset{y>0}{1}, 0\right)$$

$$\iint_S \bar{G}\,d\bar{s} = \iint_S \bar{G}\,\breve{n}\,ds = \iint_D (x\sqrt{2x-x^2}, x, xz)\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, 1, 0\right) dx\,dz =$$

$$= \iint_D \frac{x\sqrt{2x-x^2}\,(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} + x \; dx\,dz = \iint_D x^2 \cancel{-x} \cancel{+x} \; dx\,dz =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} x^2\,dz\,dx = \int_0^2 x^2(4-2x)\,dx = \int_0^2 4x^2-2x^3\,dx =$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{G}\,d\bar{S} = 8/3}$$

AM 2 UTN BA | Final | HOJA N° 3/3 FECHA 27-2-24

**P2** Sea el campo escalar $h: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = (x^4+y^2)\sqrt{xy}$
Analice si la función h alcanza, en $(0,0)$, un extremo global en D. ¿Es también extremo local? Fundamentar

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ tenemos que $h(x,y) \geq 0$ pues $x^4 \geq 0$
$x^2 \geq 0$
$\sqrt{xy} \geq 0$

$\underbrace{h(0,0) = 0}$

h alcanza su valor mínimo en $(0,0)$ $\Rightarrow$ h alcanza extremo mínimo global y local en $(0,0)$

**P3** Calcule la circ. del campo vectorial $F(x,y) = (g(x)+2y,\ 3x-2y^2+5y)$ a lo largo de la curva frontera de la región plana D.
$D: \begin{cases} y \geq |x| \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$ orientada en sentido horario, siendo $g(x)$ la soluc. del problema de valores iniciales: $\begin{cases} y''+6y'+13y=0 \\ y(0)=2 \quad y'(0)=0 \end{cases}$

No es necesario

$a=-3 \quad b=2$

$y''+6y'+13y=0$

$r^2+6r+13=0 \quad \begin{matrix} r_1 = -3+2i \\ r_2 = -3-2i \end{matrix}$ $\quad y_G = Ae^{-3t}\cos(2t) + Be^{-3t}\,\text{sen}(2t)$
$A, B \in \mathbb{R}$

$y'_G = -3Ae^{-3t}\cos(2t) + Ae^{-3t}(-2\,\text{sen}(2t)) - 3Be^{-3t}\,\text{sen}(2t) + Be^{-3t}\cos(2t)\,2$

$y(0) = 2 = Ae^0\cos(0) + Be^0\,\text{sen}(0) = \boxed{A=2}$

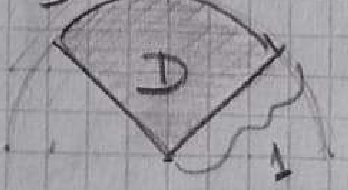
$y'(0) = 0 = -3Ae^0\cos(0) + Ae^0(-2\,\text{sen}(0)) - 3Be^0\,\text{sen}(0) + Be^0\cos(0)\,2 =$
$= -3 \times 2 \times 1 + 0 - 0 + B\,2 = 0 \Rightarrow \boxed{B=-3}$

$\boxed{y = 2e^{-3t}\cos(2t) - 3e^{-3t}\,\text{sen}(2t)}$

Se cumplen las hip. Green $\Rightarrow \oint_{c^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \pm \iint_D Q'_x - P'_y\,dx\,dy$

$\oint_{c^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_D 3-2\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{Área de } D = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

$\boxed{\oint_{c^+} \bar{F}\,d\bar{l} = \frac{\pi}{4}}$

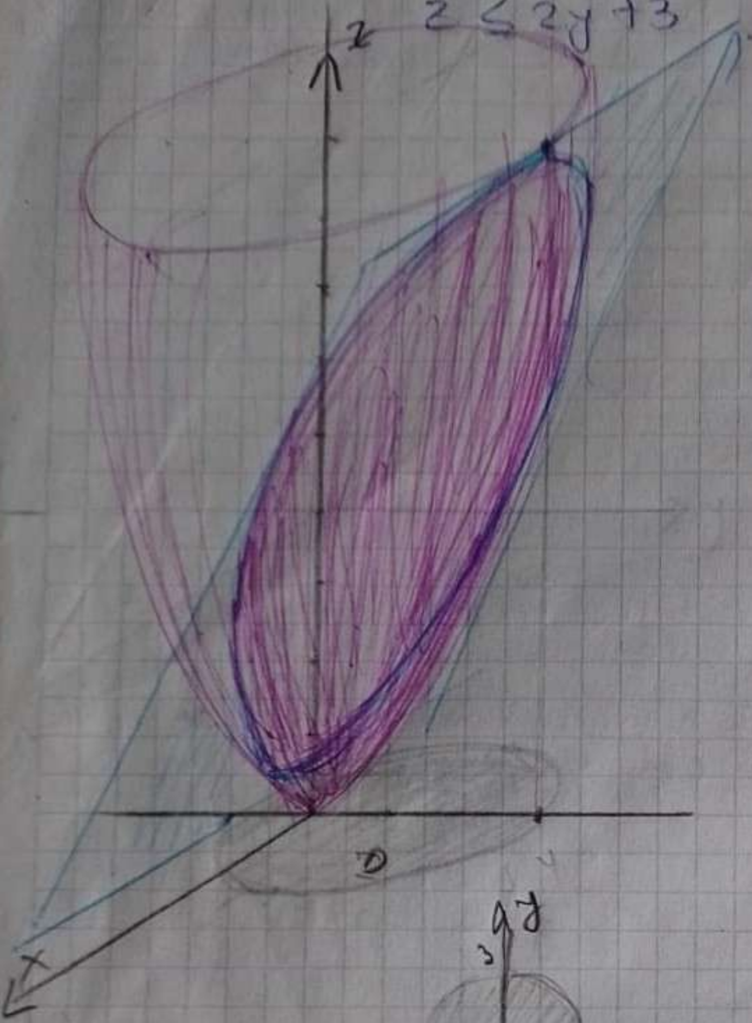
(D)  $\frac{1}{4}$ de círculo

NOTA

P4 Calcule el volumen del sólido definido por:

$z \geq x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloide

$z \leq 2y+3 \rightarrow$ plano (con x libre)




$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 2y+3 \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = 2y+3$$

$$x^2+(y-1)^2-1 = 3$$

$$\boxed{x^2+(y-1)^2 = 4}$$

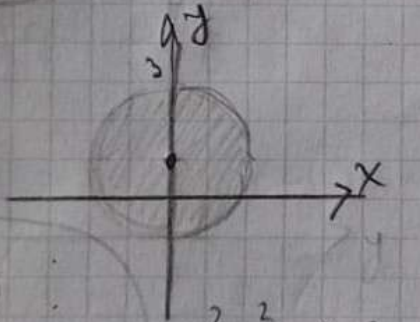
$$Vol = \iiint_W dx\,dy\,dz =$$

$$\text{C.V.} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2+2r\,sen(t)+1}^{2r\,sen(t)+5} \underset{\text{Jac.}}{r}\, dz\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(\cancel{2r\,sen(t)}+\underbrace{5-r^2-\cancel{2r\,sen}-1}_{4})\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3\,dr\,dt = \int_0^{2\pi} 4\,dt =$$

$$= 8\pi$$




$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,sen(t)+1 \end{cases}$$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2 + r^2 sen^2 + 2r\,sen + 1$$

$$x^2+y^2 = r^2+2r\,sen+1$$

$$\boxed{Vol = 8\pi}$$

$$r^2+2r\,sen(t)+1 \leq z \leq \underbrace{2(r\,sen(t)+1)+3}_{2r\,sen(t)+5}$$